Cavaillès et Lautman, deux pionniers

par Gilles-Gaston GRANGER

| Presses Universitaires de France | *Revue philosophique de la France et de l'étranger*

3002/3 - Tome 127 - n° 3
ISSN 0035-3833 | ISBN 2130526675 | pages 293 à 301

CAVAILLÈS ET LAUTMAN, DEUX PIONNIERS

Tous deux nés dans les premières années du XX^e siècle, étudiants à l'École normale, liés d'amitié. Tous deux étaient membres de la Résistance, et Cavaillès, l'un de ses chefs nationaux. Tous deux fusillés par les nazis. Lautman avait 36 ans à sa mort, Cavaillès avait 40 ans. Gaston Bachelard, dans une lettre datée de janvier 1938, écrit à Lautman qu'il est, avec Cavaillès, « un représentant de la jeune équipe qui ramènera la philosophie aux tâches héroïques de la pensée difficile » (*Revue d'histoire des sciences,* XV, 1, 1987, p. 129).

Il exprimait l'espoir qu'ils forment des disciples, vœu qui malheureusement ne put être que rarement accompli. Ayant eu moi-même le privilège d'être un étudiant de Cavaillès, je tenterai d'esquisser le contenu et la portée des contributions complémentaires que les deux penseurs prématurément et tragiquement disparus ont apportées à une interprétation historique et philosophique des mathématiques.

Un point de départ

Je prends ici l'expression « point de départ » au double sens de point d'origine et de point de déviation. Au moment où Lautman et Cavaillès firent leurs études, trois traits caractérisaient la philosophie française des mathématiques.

1. L'importance de l'enseignement de Léon Brunschvicg dominant l'Université française.

L'œuvre maîtresse de Brunschvicg (*Les étapes de la philosophie des mathématiques,* 2^e éd., 1922) considérait certes les problèmes historiques de cette discipline dans leur détail, mais sans proposer vrai-

Revue philosophique, n° 3/2002, p. 293 à p. 301

ment une analyse des œuvres individuelles. Brunschvicg est un philosophe de la rationalité, dont le paradigme est pour lui la pensée mathématique. Mais sa conception idéaliste du rationnel et du logique est assez restrictive, bien qu'il ait insisté sur l'aspect évolutif de la Raison. Aussi bien favorise-t-il un concept du développement historique des mathématiques comme dominé par son idéalisme philosophique, ce qui ne laisse pas de biaiser parfois ses interprétations.

2. L'influence de H. Poincaré comme autorité mathématique discutant la nature de cette science.

Poincaré est fortement contraire au logicisme et même dédaigne le simple usage du symbolisme logique. Il insiste constamment sur la réalité d'éléments *synthétiques a priori* en mathématique. Il qualifie sa propre conception de « pragmatisme », par quoi il entend que les objets mathématiques ne devraient pas être définis comme des notions abstraites, ces définitions devant les atteindre directement comme objets individuels. Néanmoins, il ne va pas jusqu'à rejoindre le « platonisme » d'Hadamard, et il se borne à mettre en vedette le caractère effectif des *constructions* mathématiques.

3. Mais aussi influence de l'École germanique : Hilbert, Emmy Noether. Cavaillès et Lautman ont tous les deux séjourné en Allemagne à Göttingen et Hambourg ; ils ont aussi maintenu des contacts avec leurs contemporains de la jeune École Bourbaki de mathématiciens français : H. Cartan, Cl. Chevalley, J. Dieudonné, Ch. Ehresmann, André Weil, J. Herbrand...

Quoique la pensée de Cavaillès et celle de Lautman aient été partiellement influencées par ce contexte philosophique, ils ont très réellement ouvert de nouvelles voies. Le problème qui leur est commun est celui de la possibilité et de l'opportunité de fonder et d'expliquer la fécondité des mathématiques ; mais leurs œuvres respectives manifestent deux styles très différents de philosopher.

Chez Lautman on trouve une vision plus ample de la mathématique contemporaine, mais une analyse plus superficielle des nombreuses théories mathématiques exposées. Les travaux de Cavaillès offrent au lecteur attentif un examen très profond des contributions effectives de quelques mathématiciens, souvent récents, mais déjà classiques comme Dedekind ou Cantor...

La pensée de Lautman semble procéder de larges perspectives sur des faits mathématiques pris comme exemples, et cette généralisation peut apparaître quelquefois comme aventureuse, laxiste ou même un peu confuse. Cavaillès part de faits mathématiques précis examinés à fond pour en proposer une interprétation philosophique. Il est ramené le plus souvent à des thèmes philosophiques classiques, reformulés et renouvelés dans une perspective mathématique. Ses considérations peuvent souffrir de quelque obscurité, mais témoignent toujours d'une compréhension profonde.

En somme, deux leçons complémentaires selon deux manières différentes, nouvelles et fécondes, de faire de l'histoire et de la philosophie des mathématiques, malheureusement interrompues, et qui ont trop rarement et trop tardivement reçu l'accueil qu'elles méritaient en France et à l'étranger. Je choisirai trois aspects importants pour présenter et distinguer leurs contributions respectives :

1 / la réalité des objets mathématiques ;
2 / rapports de la logique et de la mathématique ;
3 / historicité et mouvement intrinsèque des mathématiques.

La réalité des objets mathématiques

1. Cavaillès : Intuition et expérience

Pour Cavaillès, l'expérience, l'expérience mathématique, est un ressort fondamental de la production des objets : « J'ai essayé de définir l'expérience mathématique en me réclamant du patronage de Spinoza », écrit-il à son père (23 janvier 1938, *in* G. Ferrière). Discutant en 1939 à la Société française de philosophe la thèse de son ami Lautman, il dit : « Par "expérience" j'entends un système de gestes, gouverné par une règle et soumis à des conditions indépendantes de ces gestes » (*in* Cavaillès, *Philosophie des sciences,* Éd. Hermann, p. 601) ; il ne s'agit naturellement pas d'une expérience physique, ni même, si l'on eut risqué cet *oxymoron,* d'une *expérience empirique.*

Quand il parle d' « empirisme », que veut-il dire ? Dans *Méthode axiomatique et formalisme* (p. 18), il explique qu'il se réfère alors « à la simultanéité de la mathématique avec son travail présent, empirisme encore puisqu'il ne s'agit que de décrire le travail effectif, mais empirisme de la pensée en acte, sans autre référence que le devenir imprévisible des mathématiques ».

Cette expérience des objets mathématiques ne doit pas être rapportée à l'intuition kantienne (et il prononce l'échec du kantisme, précisément analysé dans *Logique et théorie de la science* et dans *Transfini et continu*), ni à l'intuition husserlienne, trop statique. L' « intuition », si elle était irréductible et donnée absolument, serait « un arrêt sans pensée » (*Transfini et continu,* p. 21, in *Philo-*

Revue philosophique, n° 3/2002, p. 293 à p. 301

sophie des sciences, p. 469). Dans cette acception, il n'y a pas à proprement parler d'*a priori* : même la logique, consistant à vérifier une procédure, est une expérience. L'intuition, pour autant qu'elle est une façon de prendre en compte des objets mathématiques, est en progrès constant et construit ses moments et niveaux successifs *pari passu* avec la création nécessaire de nouveaux concepts.

2. *Lautman : structure et existence*

L'opposition de ces deux termes exprime la position par Lautman du problème de l'objet mathématique. Les structures abstraites sont séminales et déterminent la nature des domaines d'objets. Par exemple, la structure d'une surface de Riemann engendre un type spécifique de fonctions algébriques sur elle définies. D'un point de vue plus général, il y a une relation réciproque entre les propriétés structurales des systèmes formels et les propriétés « extensives » des champs d'objets correspondants.

Plus profondément, objets mathématiques et structures sont l'incarnation d' « idées ». Dans cette perspective, Lautman tente d'abord de mettre au jour de *grands schèmes structurels* qui domineraient l'élaboration de vues corrélatives concernant les objets. Par exemple, l'opposition local/global (l'introduction comme globales par Cauchy et Riemann des fonctions analytiques, et la définition de Weierstrass au moyen de séries convergentes, qui est de nature locale). Il introduit en outre des *schèmes de genèse,* dans lesquels l'existence d'une entité émerge de la décomposition structurale d'un domaine de base (*Essai sur les notions de structure et d'existence,* p. 100). Le principal exemple est tiré des théorèmes d'existence dans la théorie des corps de classes, qui dépendent de la décomposition en classes des idéaux du corps de base. L'inspiration est ici clairement platonicienne, en un sens tout à fait authentique. En quelques endroits des œuvres de Lautman, on trouve cependant de brèves allusions à une tentative pour rattacher sa conception de la genèse des objets à une théorie heideggérienne de l'être très vaguement indiquée : « Comme dans la philosophie d'Heidegger, il est possible de voir dans la philosophie des mathématiques telle que nous la concevons, l'activité fondamentale se transformant en la genèse de notions concernant la réalité » (*Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques,* Hermann, 1939, p. 226). L'ami Cavaillès, dans une lettre datée du 7 novembre 1938, se référant à cet essai, parle alors, avec beaucoup de bienveillance, de « possibles malentendus »...

Quoi qu'il en soit, Lautman tout comme Cavaillès, dans la mesure où leurs motivations profondes coïncident, sur la base d'une interprétation de l'objectivité, mathématique, et par-delà, proposent une perspective sur la *rationalité* en général, inspirée chez le premier par Platon, et chez le second, profondément et plus secrètement, par Spinoza.

Logique, pensée formelle et mathématique

Quel est alors le rôle de la pensée formelle dans les opérations de la Raison, et spécialement des mathématiques ?

1. Lautman : La pensée formelle n'est pas restreinte à la logique

Lautman rejette vigoureusement la thèse du Cercle de Vienne d'un positivisme logique réduisant les mathématiques au développement tautologique d'une pure logique : « Les schèmes logiques... ne sont pas antérieurs à leur actualisation dans une théorie mathématique » (*Essai sur les notions de structure...*, p. 142). La philosophie doit réaliser le « drame logique » qui a lieu dans les théories. De telle sorte que la tâche de la philosophie ne serait pas de redécouvrir dans les mathématiques les problèmes *logiques* de la métaphysique classique, mais de partir d'une compréhension de la *structure* des théories pour atteindre les problèmes logiques *(ibid.)*. Cette remarque pourrait aisément être interprétée comme une critique de Cavaillès. Pour Lautman, la pensée formelle ne semble pas avoir de statut propre ; ce qui lui paraît important est la solidarité entre un ensemble d'opérations formelles, mais non pas purement logiques, et l'existence d'un domaine d'objets (*ibid.*, p. 95).

Même dans le champ de la logique, Lautman insiste sur la mutuelle dépendance de considérations syntaxiques (structurales) et de considérations sémantiques (matérielles, extensives). « L'essence d'une forme s'actualise dans une matière qu'elle crée, l'essence d'une matière produit les formes que sa structure dessine. »

2. Cavaillès : paradigme et thématisation

Cavaillès insiste lui aussi sur cette solidarité mais d'une manière différente. Pour lui, fonder la mathématique, c'est réellement la formaliser. Dans *Sur la logique et la théorie de la science,* il met au jour la notion de forme logique indispensable à une théorie de la science, son problème principal étant d'expliquer en quel sens et dans quelle mesure la pensée est alors formelle. Mais, en dépit de l'adjectif « logique », sa forme ne peut être réduite à de la logique pure. Commentant Hilbert avec faveur, il écrit : « Il n'y a pas de pensée logique pure, la logique n'est qu'un constituant non isolable de toute pensée fonctionnant véritablement » (*Méthode axiomatique et formalisme,* p. 92).

À l'intérieur même de la pensée logique, des contenus sont présents : « Il faut que la création se situe dans ce sensible que représente l'espace combinatoire... Tel est le double rôle du signe, mixte, lui aussi, intellectuel – sensible » (*ibid.*, p. 94).

Cette forme « logique » est décrite en termes d'actes de pensée ; elle apparaît comme *constitutive* des objets mathématiques, et son opposition aux contenus n'est clairement que relative, et nullement absolue. Au niveau de la construction de concepts d'objets mathématiques, la forme « paradigmatique » est une réduction canonique, qui expose l'aspect opératoire de la procédure, vidée de ses contenus variables. Par exemple, le concept d'équation algébrique, qui distingue des variables et des paramètres, constitue une structure paradigmatique. Mais quand la forme opératoire elle-même se trouve mobilisée, *thématisée,* considérée comme une espèce nouvelle d'objet variable, doué de nouvelles propriétés formelles donnant lieu à diverses actualisations, on obtient des structures plus abstraites, ou plutôt des lois de construction, telles, dans le cas présent de l'algèbre, les notions de groupe, d'anneau de corps, etc. Métaphoriquement, le paradigme est un procès « horizontal » ; la thématisation, un procès « vertical ». Tous deux sont les produits d'actes de pensée créatrice, et non la simple unification d'un divers donné, ni simplement l'expulsion de contenus d'une forme préexistante.

Cette double procédure de dissociation des formes « libère un sens », c'est-à-dire que toute forme exhibée doit être comprise comme *renouvellement virtuel de contenus possibles*. Ce serait donc une erreur de détourner cette thèse en une interprétation wittgensteinienne, assimilant les objets à leur mode de construction ; ils sont bien en effet la trace d'opérations, mais une trace immédiatement stabilisée, à un niveau supérieur, comme point de départ d'une nouvelle opération. En mathématiques, la philosophie doit élucider le mouvement qui explicite les structures, à la fois dans la construction « paradigmatique » de formes canoniques et dans la manifestation « thématisante » de leur principe actif. Mais ce mouvement, quoique actualisé dans un activité *libre,* n'en révèle pas moins une *nécessité* constitutive des objets mathématiques.

L'histoire et le mouvement intrinsèque du développement des mathématiques

Comment cette nécessité interne se révèle-t-elle dans l'histoire ?

1. *Lautman : la notion d'une « dialectique » mathématique*

Le mot « dialectique » est utilisé par Lautman en un sens platonicien (*Nouvelles recherches,* p. 204) : « En mathématiques, les relations idéales d'une dialectique, abstraite et supérieure à la mathématique, sont concrètement réalisées. » Son intention n'est pas de montrer qu'une *nécessité interne* est directement à l'œuvre dans l'évolution des théories mathématiques, mais de reconnaître dans cette évolution le reflet du pouvoir d'*idées,* dont l'action rationnelle s'étend au-delà du champ mathématique. De là l'intérêt plutôt faible qu'il porte à l'histoire proprement dite.

Plutôt que des moments historiquement caractérisés, Lautman introduit la notion de « mixte » ; le mot est platonicien, la notion plutôt kantienne. Le processus de détermination d'objets par des structures formelles indiqué plus haut requiert souvent un intermédiaire entre « le domaine et l'entité ». La structure de tels « mixtes » « imite celle du domaine dont ils participent, et leurs éléments appartiennent déjà au genre des entités qui doivent naître sur le domaine » (*Essai,* p. 106). Lautman les rapproche des schèmes transcendantaux kantiens ; un exemple en serait donné par la tentative de Herbrand de réduire les propositions quantifiées du calcul des prédicats aux propositions simples du calcul propositionnel : il introduit un champ fini de valeurs métamathématiques correspondant au champ infini des valeurs des variables (*ibid.*, p. 108). De même, la notion d'espace de Hilbert est interprétée comme un « mixte », dont la structure topologique est infinie, tandis qu'il possède une structure algébrique finie déterminée par ses vecteurs propres.

2. *Cavaillès : la nécessité interne d'une histoire des concepts*

Contrairement à Lautman, Cavaillès reconnaît à l'histoire une valeur intrinsèque, sans pourtant en aucune manière rejoindre une conception hégélienne de la Raison. Il rejette la thèse d'une détermination de la succession des concepts mathématiques par une causalité externe, dont le rôle serait tout au plus secondaire ; mais il rejette également la thèse d'une détermination purement transcendantale, selon laquelle la succession historique ne ferait rien de plus que « révéler des significations authentiques » (*Sur la logique...*, p. 76). La progressivité dans l'appréhension des concepts n'est pas un accident empirique, elle est essentielle, « la caractéristique de l'intelligible » (*ibid.*, p. 36). Thèse qui semble, de façon marquée, influencée par les idées spinozistes touchant les modes finis et la connaissance du second genre.

En fait, le progrès des concepts mathématiques est décrit par Cavaillès sur le cas d'exemples particuliers, où des obstacles à l'application d'une règle suggèrent, ou plutôt imposent, une restructuration, de sorte que « la nécessité dialectique se masque sous un échec ». L'objet mathématique est alors reconstruit dans une « nouvelle expérience qui ne se donne que par un effort positif d'authentique aperception » (*Méthode axiomatique...*, p. 183). L'insistance sur le mot « expérience » pourrait donner l'impression fausse que la philosophie de Cavaillès est une « philosophie de la conscience », contrairement à sa constante revendication d'une « philosophie du concept » ; mais, comme on l'a noté plus haut, l'expérience n'est pas pour lui un état de conscience, mais un système d'actions, et les concepts sont des résultats amenés à l'existence par notre travail, par nos laborieux actes de pensée, cependant qu'une fois construits ils sont en même temps nécessaires et indépendants de ces actes. La pensée mathématique n'est pas vide, elle expose des contenus réels. Si l'on me permet d'aventurer une interprétation de cette opposition point trop claire : concept/conscience, je dirais que le mot de « conscience » s'applique aux opérations de pensée *isolées*, figurant une unité synthétique vide nécessairement ancrée au sujet. Au contraire, le concept serait une systématisation des actes opérateurs, introduisant des contenus, et qui va au-delà des actes en tant qu'ils procèdent d'un sujet. Peut-être cette suggestion pourrait-elle être confortée par une remarque finale, énigmatique, de *Transfini et continu* (p. 274), où Cavaillès dit que, de « la solidarité effective d'un développement réglé [des concepts] », « la justification intelligible est à la fois hors de la condition humaine pour être intégrale et pourtant au moins en idée peut-être une de ses caractéristiques essentielles ».

Texte qui fait au moins entrevoir une philosophie totale de la Raison qui, me semble-t-il, aurait pu se développer dans une perspective renouvelée du spinozisme.

Selon deux voies certes différentes, et qui peut-être se fussent encore davantage écartées, Cavaillès et Lautman ont cependant tous les deux proposé une idée de la rationalité fondée sur une interprétation précise des œuvres de science ; leur influence a été modeste et sans doute n'a jamais été relayée par les grands instruments de la communication. Mais on peut reconnaître cependant chez quelques philosophes et scientifiques des générations récentes le renouveau, appelé par Gaston Bachelard, d'un attrait pour « les tâches héroïques de la pensée difficile », dont ils ont été, chacun selon son style, les promoteurs.

Gilles-Gaston GRANGER,
Collège de France.

Revue d'histoire des sciences, XL-1, 1987 (H. Sinaceur, G. Heinzlmann, C. Chevalley, J. Petitot).
H. Sinaceur, *Jean Cavaillès, philosophie et mathématique,* Paris, PUF, 1994.
J. Cavaillès, *Œuvres complètes de philosophie des sciences,* Paris, Hermann, 1994.
A. Lautman, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique,* Paris, Hermann, 1937.
— *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel,* Paris, Hermann, 1937.
— *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits,* Paris, UGE, 1977.

Revue philosophique, n° 3/2002, p. 293 à p. 301